数理解析研究所講究録
61巻 1968年 77-95

Invariant Subspaces

東北大 教養 大野芳希

函数解析の函数論への応用として単位円板上のHardy族H^pの議論がなされている。この函数論の一般のcompact空間への抽象化とは別にHilbert空間のvector，或はvon Neumann代数の元、特に有限次元の行列を値として持つ様な函数のHardy族の研究が最近あらわれている．前者はHilbert空間上の作用素に対する不変部分空間の問題とも関連しており[3, 4]、後者は非可換積分論への函数環の理論の応用と見ることも出来る[1]。こゝでは前者について最近の結果を紹介する．今の所函数環の理論が明白にあらわれているわけではないが、問題のとらえ方その他に、その考え方が非常に有効である。以下のいくつかの結果は函数環の立場で拡張されている[5, 12]．

§1　Wienerの定理とBeurling-Laxの定理　Xを単位円周、$d\sigma$をX上の（正規化された）Lebesgue測度、χを$\chi(e^{i\theta})=$

$e^{i\theta}$で定義されたX上の函数とする。$\mathcal{K}$を可分 Hilbert空間とし$\mathcal{K}$の cnos を$\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$とする。

$L^2_{\mathcal{K}}$をX上の弱可測な$\mathcal{K}$-値函数で norm

$$\|F\|_2 = \left\{ \int \|F(e^{i\theta})\|^2_{\mathcal{K}}\, d\sigma \right\}^{1/2}$$

が有限なもの全体の作る Hilbert 空間とする。Hardy族$H^2_{\mathcal{K}}$を$H^2_{\mathcal{K}} = \{ F \in L^2_{\mathcal{K}} \mid F = \sum_{j=1}^{\infty} f_j e_j,\ f_j \in H^2\ (\forall j) \}$ $(= \{ F \in L^2_{\mathcal{K}} \mid F(e^{i\theta}) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n e^{in\theta},\ \varphi_n \in \mathcal{K} \})$で定義する。

X上a.e.で定義された、$\mathcal{K}$の閉部分空間を値として持つ様な函数を値域函数という。a.e.で一致する値域函数は同一のものと見なす。値域函数Jが可測であるとは$\mathcal{K}$から$J(e^{i\theta})$への射影$Q(e^{i\theta})$が作用素の意味で弱可測なことである。可測な値域函数Jに対して$\mathfrak{M}_J = \{ F \in L^2_{\mathcal{K}} \mid F(e^{i\theta}) \in J(e^{i\theta})$ a.e.$\}$と定義する。

$L^2_{\mathcal{K}}$の閉部分空間$\mathfrak{M}$が invariant であるとは$\chi\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}$なることである。特に$\chi\mathfrak{M} \subsetneq \mathfrak{M}$なるとき$\mathfrak{M}$は simply invariant であるといい、$\chi\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$なるとき$\mathfrak{M}$は doubly invariant であるという。

<u>定理1 (Wiener)</u>　$L^2_{\mathcal{K}}$の doubly invariant subspace $\mathfrak{M}$は

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_J$$

の形である。此処でJは可測な値域函数で一意である。

<u>定理2 (Beurling-Lax)</u>　$L^2_{\mathcal{K}}$の simply invariant subspace $\mathfrak{M}$は

$$\mathfrak{M} = \mathcal{U} H^2_{\mathcal{K}_1} \oplus \mathfrak{M}_J$$

の形である。此処でJは可測値域函数、$\mathcal{U}$はX上の可測な作

用素函数で値は Hilbert 空間$\mathcal{K}$から$\mathcal{H}$への isometry その値域は a.e. で J と直交する様なものである．（この U もある意味で一意である（命題7参照）．）

$L^2_{\mathcal{H}}$の simply invariant subspace $\mathfrak{M}$ に対して $\bigcap_{n<\infty} \chi^n \mathfrak{M} = \{0\}$ となるとき $\mathfrak{M}$ は pure であるという．このとき定理2の表現は $\mathfrak{M} = UH^2_{\mathcal{H}}$ となる．又 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}$ が存在して a.e. で $\{F_n(e^{i\theta})\}$ が$\mathcal{H}$を span するとき $\mathfrak{M}$ は full range を持つという．

<u>定理3</u>　可測値域函数 J が定数次元である、即ち $\dim J(e^{i\theta}) = N < \infty$ a.e. 又は $\dim J(e^{i\theta}) = \infty$ a.e. である必要十分条件は pure な simply invariant subspace $\mathfrak{M}$ が存在して、$\mathfrak{M}$ を含む最小の doubly invariant subspace を定理1で表現したときの値域函数が J であることである．

§2　解析的値域函数

Beurling-Lax の定理に表われる二つの函数に注目する．可測な値域函数 J が解析的であるとは $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H^2_{\mathcal{H}}$ が存在して a.e. で $\{F_n(e^{i\theta})\}$ の closed linear span が $J(e^{i\theta})$ となることである．

<u>定理4</u>　値域函数 J が解析的なら $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H^2_{\mathcal{H}}$ を適当にとって a.e. で $\{E_n(e^{i\theta})\}$ が $J(e^{i\theta})$ の正規直交基になる様にできる．従って J は定数次限である．

解析的値域函数に対して次ぎの様な問題を考えることができる [3]．

問題(1) $\mathfrak{J}$が解析的なら$\mathfrak{J}^{\perp}$も解析的か. 又そうなることが出来るか.

(2) 解析的値域函数の和や共通部分は亦解析的か.

(3) コ解析的な値域函数を同様に定義したとき, 解析的値域函数$\mathfrak{J}$が亦コ解析的になり得るか. 又$\mathfrak{J}^{\perp}$はコ解析的か.

解析的値域函数の可付番和が解析的なことは容易に分る. これらの問題に関してCamburn[2]がいくつかの回答を与えている.

<u>定理5</u> 解析的値域函数$\mathfrak{J}$が有限次元なら$\mathfrak{J}^{\perp}$はコ解析的である($\dim \mathcal{H} = \infty$でもよい).

<u>系6</u> $\mathfrak{J}, \mathfrak{K}$が有限次元の解析的値域函数なら$\mathfrak{J} \cap \mathfrak{K}$も解析的.

(注意) $\dim \mathcal{H} = \infty$とする. (i) 解析的値域函数の共通部分は解析的であるとは限らない. (ii) $\mathfrak{J}^{\perp}$が一次元の解析的値域函数であるが、コ解析的でない様な解析的値域函数$\mathfrak{J}$が存在する([2], [3]).

§3 内部函数

$\mathcal{U}$がunitary函数であるとは$\mathcal{U}$がX上の可測な作用素函数でa.e.で$\mathcal{U}(e^{i\theta})$が$\mathcal{H}$上のunitary作用素であることである. unitary函数$\mathcal{U}$に対して$\mathcal{U}H^2_{\mathcal{H}} \subset H^2_{\mathcal{H}}$なるとき$\mathcal{U}$を内部函数という. full rangeを持つ$H^2_{\mathcal{H}}$のinvariant subspace $\mathfrak{M}$を$\mathcal{U}H^2_{\mathcal{H}}$と表現するとき$\mathcal{U}$は内部函数である.

命題7　$\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ を unitary 函数とする

(1)　$\mathfrak{u} H^2_{\mathscr{H}} = H^2_{\mathscr{H}} \Leftrightarrow \mathfrak{u}$: unitary const.

(2)　$\mathfrak{u} H^2_{\mathscr{H}} \subset \mathfrak{v} H^2_{\mathscr{H}} \Leftrightarrow \mathfrak{v}^* \mathfrak{u}$: 内部函数

unitary 函数 $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ に対して $\mathfrak{u} H^2_{\mathscr{H}}, \mathfrak{v} H^2_{\mathscr{H}}$ を含む最小の simply invariant subspace $\mathfrak{u} H^2_{\mathscr{H}} \vee \mathfrak{v} H^2_{\mathscr{H}}$ がまた $\mathfrak{w} H^2_{\mathscr{H}}$ と表わせるとき $\mathfrak{w} = \mathfrak{u} \vee \mathfrak{v}$ と定義する。又 $\mathfrak{u} H^2_{\mathscr{H}} \cap \mathfrak{v} H^2_{\mathscr{H}} = \mathfrak{w} H^2_{\mathscr{H}}$ が full range であるとき $\mathfrak{w} = \mathfrak{u} \wedge \mathfrak{v}$ と定義する。更に次ぎの様な記号を用いる。

$^*N_{\mathscr{H}} = \{ \mathfrak{u}^* \mathfrak{v} \mid \mathfrak{u}, \mathfrak{v}$: 内部函数$\}$,　$N^*_{\mathscr{H}} = \{ \mathfrak{u} \mathfrak{v}^* \mid \mathfrak{u}, \mathfrak{v}$: 内部函数$\}$

命題8　(1)　$\mathfrak{u} \wedge \mathfrak{v}$: 存在 $\Leftrightarrow \mathfrak{u}^* \mathfrak{v} \in N^*_{\mathscr{H}}$

(2)　$\mathfrak{u} \vee \mathfrak{v}$: 存在 $\Leftrightarrow \mathfrak{u}^* \mathfrak{v} \in {}^*N_{\mathscr{H}}$

証明. (1) (⇒)　$\mathfrak{u} H^2_{\mathscr{H}} \cap \mathfrak{v} H^2_{\mathscr{H}} = \mathfrak{w} H^2_{\mathscr{H}}$ ($\mathfrak{w}$: unitary) で $\mathfrak{u} H^2_{\mathscr{H}}, \mathfrak{v} H^2_{\mathscr{H}} \supset \mathfrak{w} H^2_{\mathscr{H}}$ 故命題7から $\mathfrak{u}^* \mathfrak{w}, \mathfrak{v}^* \mathfrak{w}$ は内部函数. このとき $\mathfrak{u}^* \mathfrak{v} = \mathfrak{u}^* \mathfrak{w} (\mathfrak{v}^* \mathfrak{w})^* \in N^*_{\mathscr{H}}$

(⇐)　$\mathfrak{u}^* \mathfrak{v} = \mathfrak{a} \mathfrak{b}^*$ ($\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$; 内部函数) とすると $\mathfrak{u} \mathfrak{a} H^2_{\mathscr{H}} = \mathfrak{v} \mathfrak{b} H^2_{\mathscr{H}} \subset \mathfrak{u} H^2_{\mathscr{H}} \cap \mathfrak{v} H^2_{\mathscr{H}}$. 従って $\mathfrak{u} H^2_{\mathscr{H}} \cap \mathfrak{v} H^2_{\mathscr{H}}$ は full range だから $\mathfrak{u} \wedge \mathfrak{v}$ は存在する。(2)も同様である。

定理9　$\dim \mathscr{H} < \infty$ のとき $N^*_{\mathscr{H}} = {}^*N_{\mathscr{H}}$

証明. $\mathfrak{a} \in {}^*N_{\mathscr{H}}$, 即ち $\mathfrak{a} = \mathfrak{u}^* \mathfrak{v}$ ($\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$: 内部函数) とする. $\mathfrak{u}$ の余因数行列の転置行列を ${}^t\mathfrak{u}$ とすれば ${}^t\mathfrak{u} = (\det \mathfrak{u}) \cdot \mathfrak{u}^{-1}$ だから $(\det \mathfrak{u}) \mathfrak{u}^{-1} H^2_{\mathscr{H}} \subset H^2_{\mathscr{H}}$, 即ち $(\det \mathfrak{u}) H^2_{\mathscr{H}} \subset \mathfrak{u} H^2_{\mathscr{H}}$. 従って $(\det \mathfrak{u})(\det \mathfrak{v}) H^2_{\mathscr{H}} \subset \mathfrak{u} H^2_{\mathscr{H}} \cap \mathfrak{v} H^2_{\mathscr{H}}$ 故に $\mathfrak{u} \wedge \mathfrak{v}$ は存在する. 命題8により $\mathfrak{a} =$

$\mathcal{U}^*\mathcal{V} \in N^*_{\mathcal{H}}$. 逆向きの包含関係を示す. $K^2_{\mathcal{H}} = \{F \in L^2_{\mathcal{H}} \mid F(e^{i\theta}) \sim \sum_{n=-\infty}^{0} \varphi_n e^{in\theta},\ \varphi_n \in \mathcal{H}\}$ とおくと $K^2_{\mathcal{H}}$ は $H^2_{\mathcal{H}}$ と類似の性質を持つ. unitary 函数 $\overline{\mathcal{U}}$ が共役内部函数であることを $\overline{\mathcal{U}} K^2_{\mathcal{H}} \subset K^2_{\mathcal{H}}$ で定義すれば今までの議論と平行に $\dim \mathcal{H} < \infty$ のとき, 共役内部函数 $\overline{\mathcal{U}}$, $\overline{\mathcal{V}}$ に対して $\overline{\mathcal{U}}^* \overline{\mathcal{V}} = \overline{\mathcal{A}}\,\overline{\mathcal{B}}^*$ ($\overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathcal{B}}$: 共役内部) と書ける. [$\mathcal{U}$; 内部函数 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{U}^*$; 共役内部函数] 故、今の場合

$$\mathcal{U}\mathcal{V}^* = \mathcal{U}^{**}\mathcal{V}^* = \overline{\mathcal{A}}\,\overline{\mathcal{B}}^* = \overline{\mathcal{A}}^{**}\overline{\mathcal{B}}^*$$

$\overline{\mathcal{A}}^*, \overline{\mathcal{B}}^*$: 内部函数故 $\mathcal{U}\mathcal{V}^* \in {}^*N_{\mathcal{H}}$ 依って $N^*_{\mathcal{H}} = {}^*N_{\mathcal{H}}$.

内部函数 $\mathcal{U}$ に対して次ぎの様な scalar の内部函数 g が存在するとき、この g を $\mathcal{U}$ の特性内部函数という. (i) $\mathcal{U}H^2_{\mathcal{H}} \supset gH^2_{\mathcal{H}}$ (ii) $\mathcal{U}H^2_{\mathcal{H}} \supset tH^2_{\mathcal{H}}$ (t : scalar の内部函数) $\Rightarrow$ $gH^2_{\mathcal{H}} \supset tH^2_{\mathcal{H}}$.

$f, g \in L^2$, $f = gh$, $g = g'h'$ (g, g' : unitary, h, h' : 外部函数) に対して $f \vee g = g \vee g'$, $f \wedge g = g \wedge g'$ と定義する.

<u>定理 10</u>　$\dim \mathcal{H} < \infty$ とする. 内部函数 $\mathcal{U} = (u_{ij})$ の特性内部函数 g は

$$g = \frac{\det \mathcal{U}}{(a_{11} \vee a_{12} \vee \cdots \vee a_{1n}) \vee \cdots \vee (a_{n1} \vee \cdots \vee a_{nn})}$$

此処で (a_{ij}) は $\mathcal{U}$ の余因数行列の転置行列.

証明. 簡単のために $\dim \mathcal{H} = 2$ とする. $\mathcal{U}H^2_{\mathcal{H}} \supset tH^2_{\mathcal{H}}$ (t : scalar 内部函数) とすると ${}^\forall f, g \in H^2$ に対して $h_1, h_2 \in H^2$ が存在して.

$$u_{11}h_1 + u_{12}h_2 = tf, \qquad u_{21}h_1 + u_{22}h_2 = tg$$

従って $(h_1 =) \dfrac{t(u_{22}f - u_{12}g)}{\det \mathcal{U}}$, $(h_2 =) \dfrac{t(u_{11}g - u_{21}f)}{\det \mathcal{U}} \in H^2$

$(\forall f, g \in H^2)$

故に $(u_{22}H^2 + u_{12}H^2) \subset \dfrac{\det \mathcal{U}}{t} H^2$, 従って $u_{22} \vee u_{12}$ は存在して

$(u_{22} \vee u_{12}) H^2 \subset (\det \mathcal{U}/t) H^2$. 同様に $(u_{11} \vee u_{21}) H^2 \subset (\det \mathcal{U}/t) H^2$.

従って $\{(u_{22} \vee u_{12}) \vee (u_{11} \vee u_{21})\} H^2 \subset (\det \mathcal{U}/t) H^2$. 故に

$$t H^2 \subset \{\det \mathcal{U}/(u_{22} \vee u_{12}) \vee (u_{11} \vee u_{21})\} H^2$$

依って t が $\mathcal{U}$ の特性内部函数である必要十分条件は

$$\det \mathcal{U} = t\{(u_{22} \vee u_{12}) \vee (u_{11} \vee u_{21})\}.$$

特性内部函数が存在するとは限らないので次ぎの様な問題を考える. $H^2_{\mathcal{K}}$ の invariant subspace $\mathfrak{M}$ が all (analytic) directions を含むとは [$F \in H^2_{\mathcal{K}} \Rightarrow \exists f$: scalar ft. $fF \in \mathfrak{M}$] なることである.

問題 $H^2_{\mathcal{K}}$ の invariant subspace $\mathfrak{M} = \mathcal{U}H^2_{\mathcal{K}}$ が all directions を含めば、$\mathfrak{M} \supset g H^2_{\mathcal{K}}$ なる scalar 内部函数 g が、従って内部函数 $\mathcal{U}$ の特性内部函数が存在するか.

現在の所まだ満足できる答は与えられていない. 得られている結果は次ぎの様なものである.

<u>定理 11</u> 任意の $e \in \mathcal{K}$ に対して $g_e \cdot e \in \mathfrak{M}$ なる有限 Blaschke 積 g_e が存在するなら $\mathfrak{M} \supset g H^2_{\mathcal{K}}$ なる有限 Blaschke 積 g が存在する.

$F \in H^2_{\mathcal{K}}$ に対して $\mathcal{F}$ を F のはる値域函数とする. このとき

$H^2_{\mathfrak{H}} \cap \mathfrak{M}_F = E \cdot H^2$ $\left(E \in H^2_{\mathfrak{H}},\ \|E(e^{i\theta})\| = 1 \text{ a.e.} \right)$ と書ける．このEをFに対する unitary 外部函数という．定数函数 $e \in \mathfrak{H}$ に対する unitary 外部函数Eに対して $g[e]$ を $g[e] \cdot E \in \mathfrak{M}$，且つ $[\, gE \in \mathfrak{M} \Leftrightarrow gH^2 \subset g[e]H^2 \,]$ なる内部函数とする．

<u>補題12</u>　一次独立な $y_1, y_2 \in \mathfrak{H}$ に対して $g[y_1], g[y_2]$ は有限 Blaschke積であるとすると，$g[f] = g[y_1] \wedge g[y_2]$ なる一次結合 $f = ay_1 + by_2$ が存在する．

証明．y_1, y_2 のはる空間を $\mathfrak{H}_1$ とし $\mathfrak{M} \cap H^2_{\mathfrak{H}_1} = \mathcal{U} H^2_{\mathfrak{H}}$ とすると $\mathcal{U} = (f_{ij})$ は $\mathfrak{H}_1$ 上 unitary で $\mathfrak{H}_1^{\perp}$ 上 0 である．$f = ay_1 + by_2$ に対して $[\, gf \in \mathfrak{M} \Leftrightarrow \exists\, g_1, g_2 \in H^2;$

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ag \\ bg \end{pmatrix} \quad]$$

従って $gf \in \mathfrak{M}$ なら $g(af_{22} - bf_{12})/\det \mathcal{U},\ g(-af_{21} + bf_{11})/\det \mathcal{U} \in H^2$.

依って $(\det \mathcal{U})H^2 \supset g(af_{22} - bf_{12})H^2$ ，$(\det \mathcal{U})H^2 \supset g(-af_{21} + bf_{11})H^2$

従って　$(\det \mathcal{U})H^2 \supset g\{(af_{22} - bf_{12}) \vee (-af_{21} + bf_{11})\}H^2$

故に　$g[f] = \det \mathcal{U} / \{(af_{22} - bf_{12}) \vee (-af_{21} + bf_{11})\}$

特に　$g[y_1] = \det \mathcal{U} / f_{22} \vee f_{21}$，　$g[y_2] = \det \mathcal{U} / f_{12} \vee f_{11}$

定理10から $\mathcal{U}$ の特性内部函数 g は

$$g = \det \mathcal{U} / (f_{11} \vee f_{12} \vee f_{21} \vee f_{22}) = g[y_1] \wedge g[y_2]$$

$g[y_1], g[y_2]$ は有限 Blaschke 積故 g も有限 Blaschke 積で，従って $g^2 H^2 \subset (\det \mathcal{U})H^2 \subset gH^2$ から $\det \mathcal{U}$ も亦有限 Blaschke 積である．

今 $f=g_1+bg_2$ に対して $g[f]\neq g$ とすると、或る有限 Blaschke 積 p が存在して $(f_{22}-bf_{12})\vee(-f_{21}+bf_{11})$ を divide するが一方 $f_{11}\vee f_{12}\vee\vee f_{21}\vee f_{22}$ は divide しない. p を各因子に分けて考えれば或る $|\lambda|<1$ と整数 k が存在して $\left(z-\lambda/1-\bar{\lambda}z\right)^k$ は $f_{22}-bf_{12}$, $-f_{21}+bf_{11}$ を divide するが $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$ の凡ては divide しない. 従って例えば $f_{12}^{(k)}(\lambda)\neq 0$ とすればこのとき $b=f_{22}^{(k)}(\lambda)/f_{12}^{(k)}(\lambda)$. この様な λ は有限個しかない. 従って $g[f]\neq g$ なる $f=g_1+bg_2$ は有限個.

定理11の証明. 仮定から各 $e\in\mathfrak{E}$ に対して $g[e]$ は有限Blaschke積になる. $\mathfrak{M}_n=\{e\in\mathfrak{E}\mid g[e]$ の零点の個数(重複度を数える)が n 個以下$\}$ とおくとき $\mathfrak{M}_n$ は閉集合である. 実際 $\mathfrak{M}_n\ni y_m\to e$ とし,

$$g[y_m](e^{i\theta})=\left(\frac{e^{i\theta}-\lambda_{m_1}}{1-\bar{\lambda}_{m_1}e^{i\theta}}\right)\cdots\left(\frac{e^{i\theta}-\lambda_{m_n}}{1-\bar{\lambda}_{m_n}e^{i\theta}}\right)$$

とおく. $|\lambda|<1$ に対して $1/(1-\bar{\lambda}e^{i\theta})$ は外部函数だから

$$(e^{i\theta}-\lambda_{m_1})\cdots(e^{i\theta}-\lambda_{m_n})\,y_m\in\mathfrak{M}$$

必要なら部分列を抜いて $\lambda_{m_1}\to\lambda_1,\cdots,\lambda_{m_n}\to\lambda_n$ とする. このとき $(e^{i\theta}-\lambda_1)\cdots(e^{i\theta}-\lambda_n)e\in\mathfrak{M}$

はての j に対して $|\lambda_j|<1$ なら有限Blaschke積 g:

$$g(e^{i\theta})=\left(\frac{e^{i\theta}-\lambda_1}{1-\bar{\lambda}_1e^{i\theta}}\right)\cdots\left(\frac{e^{i\theta}-\lambda_n}{1-\bar{\lambda}_ne^{i\theta}}\right)$$

に対して $ge\in\mathfrak{M}$, 従って $g[e]$ の零点の個数は n 以下. 故に $e\in\mathfrak{M}_n$. $|\lambda_j|=1$ なる j があるときは $e^{i\theta}-\lambda_j$ は外部函数故その数 k に応

じて $e \in \mathfrak{M}_{n-k} \subset \mathfrak{M}_n$. Baireの定理によりある$\mathfrak{M}_k$は球$\{x : \|x_0 - x_0\| < \varepsilon\}$を含む. $y \in \mathcal{H}$に対して$x_0 + \frac{\varepsilon}{2\|y\|} y \in \mathfrak{M}_k$だから$y \in \mathfrak{M}_{2k}$. 従って補題12により任意の$n$に対して$g[x_n] = g[e_1] \wedge \cdots \wedge g[e_n]$なる$x_n$が存在する. このとき$g[x_1]H^2 \supset g[x_2]H^2 \supset \cdots$ だから$\mathcal{H} = \mathfrak{M}_{2k}$より或る$x_{n_0}$に対して$g[x_{n_0}] = g[x_{n_0+1}] = \cdots$. 故に$\bigcap_{j=1}^{\infty} g[e_j]H^2 = g[x_{n_0}]H^2$. 従って$\mathfrak{M} \supset g[x_{n_0}]H^2_{\mathcal{H}}$.

<u>定理13</u> $\dim \mathcal{H} < \infty$, U: 内部函数なら$UH^2_{\mathcal{H}} = VH^2_{\mathcal{H}} \cap WH^2_{\mathcal{H}}$且つ$\det U = (\det V)(\det W)$, $\det V$; Blaschke, $\det W$; singular なる内部函数V, Wが存在する.

§4 Invariant subspaces

問題 $\mathcal{H}$ ($\dim \mathcal{H} > 1$)上定義された有界線型作用素Tは$T\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_0$且つ$\{0\} \subsetneq \mathcal{H}_0 \subsetneq \mathcal{H}$なる閉部分空間$\mathcal{H}_0$を持つか.

これがTの invariant subspace の問題である. (i) $\dim \mathcal{H} < \infty$のとき答は肯定的、実際$T$は固有 vector を持つが、これは一次元の invariant subspace をはる. (ii) $\dim \mathcal{H} > \infty$のときも肯定的. このときは$0 \neq \varphi \in \mathcal{H}$なる$\varphi$に対して$\{T^n \varphi\}_{n=0}^{\infty}$の closed linear span を考えればよい.

推移作用素Sを $S: H^2_{\mathcal{H}} \ni \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \chi^n \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \chi^{n+1} = \chi\left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \chi^n\right)$ で定義し、$H^2_{\mathcal{H}}$に於けるSの共役作用素をS^*とする:

$$S^* ; \ H^2_{\mathcal{H}} \ni \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \chi^n \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n+1} \chi^n .$$

$H^2_{\mathcal{H}}$の閉部分空間$\mathcal{K}$と$\mathfrak{M} = H^2_{\mathcal{H}} \ominus \mathcal{K}$に対して $S^*\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ と

$S\mathfrak{M} \subset S$ とは同値. 従って $\{0\} \subsetneqq \mathfrak{N} \subsetneqq \mathcal{K}$ なる S^*-invariant subspace $\mathfrak{N}$ を見つけることゝ $\mathfrak{M} \subsetneqq \mathfrak{M}_0 \subsetneqq H^2_{\mathcal{H}}$ なる S の invariant subspace $\mathfrak{M}_0$ を見つけることゝは同値である.

以下に於いて T を $\|T\|<1$ なる $\mathcal{H}$ 上の有界線型作用素とし, 対応 $A: \mathcal{H} \to H^2_{\mathcal{H}}$ を

$$A: \quad \mathcal{H} \ni \varphi \longrightarrow F_\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} (T^n \varphi) x^n = (I - xT)^{-1} \varphi \in H^2_{\mathcal{H}}$$

で定義する. $\mathcal{K}_T = A\mathcal{H}$ とおくと A は $\mathcal{H}$ から $H^2_{\mathcal{H}}$ の閉部分空間 $\mathcal{K}_T$ の上への位相同型対応で $AT = S^*A$, 即ち S^* と T は unitary 同値. $\mathfrak{M}_T = H^2_{\mathcal{H}} \ominus \mathcal{K}_T$ を T の Rota 空間という [7].

T の invariant subspace の存在性の問題が positive である必要十分条件は T の Rota 空間 $\mathfrak{M}_T$ が極大でない, 即ち $H^2_{\mathcal{H}} \supsetneqq \mathfrak{M}_0 \supsetneqq \mathfrak{M}_T$ なる invariant subspace $\mathfrak{M}_0$ が存在することである.

<u>定理 14</u> $H^2_{\mathcal{H}}$ の invariant subspace $\mathfrak{M}$ が余次元 1 を持つ必要十分条件は或る $|\lambda|<1$ と $\varphi_0 \in \mathcal{H}$ $(\varphi_0 \neq 0)$ に対して $\mathfrak{M} = \{F \in H^2_{\mathcal{H}} \mid F(\bar{\lambda}) \perp \varphi_0 \text{ in } \mathcal{H}\}$ と表わせることである.

証明. $\mathcal{K} = H^2_{\mathcal{H}} \ominus \mathfrak{M}$ とおく. $\dim \mathcal{K} = 1$ とするとき $0 \neq G \in \mathcal{K}$, $G = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n x^n$ をとれば, $S^*G \in \mathcal{K}$ 故 $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在して

$$S^*G = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n+1} x^n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n x^n$$

故に $\varphi_{n+1} = \lambda \varphi_n$ $(\forall n \geqq 0)$ で従って $\varphi_n = \lambda^n \varphi_0$ $(\forall n \geqq 0,\ \varphi_0 \neq 0)$. $G = (\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n x^n) \varphi_0 \in H^2_{\mathcal{H}}$ だから $|\lambda|<1$. 依って $G = \varphi_0 / (1-\lambda x)$.

逆に $|\lambda|<1$, $\varphi_0\in\mathfrak{K}$ なる組に対して $G=\varphi_0/(1-\bar{\lambda}x)$ とおき $K=\{aG\mid a\in\mathbb{C}\}$ を作ると K は S^*-invariant な1次元空間である.
所で $F\in\mathfrak{M}\Leftrightarrow$

$$0=\int(G,F)\,d\sigma=\int(\varphi_0,(1+\bar{\lambda}x^{-1}+\bar{\lambda}^2x^{-2}+\cdots)F)\,d\sigma$$

$F=\sum_{n=0}^{\infty}\psi_n x^n$ 故

$$0=\int(G,F)\,d\sigma=(\varphi_0,\sum_{n=0}^{\infty}\bar{\lambda}^n\psi_n)=(\varphi_0,F(\bar{\lambda}))$$

換言すれば $F\in\mathfrak{M}\Leftrightarrow F(\bar{\lambda})\perp\varphi_0$ in $\mathfrak{K}$.

定理15　$H^2_{\mathfrak{K}}$ の invariant subspace $\mathfrak{M}$ が極大で且つ $\mathfrak{M}\supset qH^2_{\mathfrak{K}}$ (q: 内部函数) なら codim $\mathfrak{M}=1$ で更に q は single Blaschke factor にとれる.

証明. $qH^2_{\mathfrak{K}}$ が $\mathfrak{M}$ で極大になる様に scalar-内部函数 q をとる. q が single factor でないなら $q=pr$ (p,r は定数でない内部函数) と書ける. $\mathfrak{M}'=\{F\in H^2_{\mathfrak{K}}\mid pF\in\mathfrak{M}\}$ とおくと $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}'\subset H^2_{\mathfrak{K}}$. $\mathfrak{M}'=H^2_{\mathfrak{K}}$ なら $pH^2_{\mathfrak{K}}\subset\mathfrak{M}$ となり q の極大性に反する. $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}'$ なら $F\in rH^2_{\mathfrak{K}}$ なる $F\notin\mathfrak{M}$ を選べば, $pF=pr(\bar{r}F)=q(\bar{r}F)\in qH^2_{\mathfrak{K}}\subset\mathfrak{M}$ 故に $F\in\mathfrak{M}'=\mathfrak{M}$ となり矛盾である. 故に q は single factor で勿論特異でないから Blaschke factor である. 依って $q(z)=(z-\lambda)/(1-\bar{\lambda}z)$ と書ける. よって τ; $F\in H^2_{\mathfrak{K}}\longrightarrow F(\lambda)\in\mathfrak{K}$ なる対応を考えると $\tau(\mathfrak{M})=\mathfrak{K}_0$ は閉部分空間で, $\tau(qH^2_{\mathfrak{K}})=\{0\}$. $\mathfrak{K}'$ が $\mathfrak{K}$ の閉部分空間なら $\tau^{-1}(\mathfrak{K}')$ は invariant で, 対応 $\tau^{-1}(\mathfrak{K}')\longleftrightarrow\mathfrak{K}'$ は $H^2_{\mathfrak{K}}$ の, $qH^2_{\mathfrak{K}}$ を含む invariant subspace と $\mathfrak{K}$ の閉部分空間との間の 1-1

対応を与える．従って極大な$\mathfrak{M}$に対応する$\mathcal{K}_0$は$\mathcal{K}$の部分空間として極大でなければならず，このとき codim $\mathcal{K}_0=1$ 故 codim $\mathfrak{M}=1$.

<u>系16</u>　$\mathfrak{M}$が極大で codim $\mathfrak{M}\neq 1$ なら各 $F\in\mathfrak{M}$ に対する unitary 外部函数 E は $\mathfrak{M}$ に属する．

証明．$F\in E\cdot H^2$ 故 $F=q h E$ (q:内部, h:外部函数) と書ける．hが外部函数だから $qE\in\mathfrak{M}$. 今 $\mathfrak{N}=\bar{q}\mathfrak{M}\cap H^2_{\mathcal{K}}$ とおくと $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{N}\subset H^2_{\mathcal{K}}$. $\mathfrak{N}=H^2_{\mathcal{K}}$ なら $\bar{q}\mathfrak{M}\supset H^2_{\mathcal{K}}$ で $\mathfrak{M}\supset qH^2_{\mathcal{K}}$ となり、定理15から codim $\mathfrak{M}=1$. これは矛盾で、従って $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}$ で 結局 $E=\bar{q}qE\in\mathfrak{M}$.

<u>定理17</u>　$\mathfrak{M}$が極大なら $E\in H^2_{\mathcal{K}}$, $\|E(e^{i\theta})\|=1$ a.e. が存在して

$$\mathfrak{M}=\{F\in H^2_{\mathcal{K}} \mid (F,E)\in H^2\}$$

証明．$\mathfrak{M}=\mathcal{U}H^2_{\mathcal{K}}$ とする．凡ての $e\in\mathcal{K}$ に対して $\mathcal{U}e$ が定数なら $\mathfrak{M}=H^2_{\mathcal{K}}$ となる．従って $\mathcal{U}e=E$ が定数でない様な $e\in\mathcal{K}$, $\|e\|=1$ が存在する．今 $\mathcal{K}$ の base $\{e_j\}$ を $e=e_1$ となる様にとれば

$$\mathcal{U}=\begin{pmatrix} k_1 & \\ k_2 & \\ \vdots & * \\ \vdots & \end{pmatrix}$$

とおくとき $E=\mathcal{U}e=\sum_{j=1}^{\infty}k_je_j$. 所で明らかに $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{M}_{(E)}\subset H^2_{\mathcal{K}}$. 此処で $\mathfrak{M}_{(E)}=\{F\in H^2_{\mathcal{K}}\mid (F,E)\in H^2\}$. 　$\mathfrak{M}_{(E)}=H^2_{\mathcal{K}}$ なら $\forall F\in H^2_{\mathcal{K}}$, $F=\sum_{j=1}^{\infty}f_je_j$ に対して $(F,E)=\sum f_j\bar{k}_j\in H^2$. 従って特に $\bar{k}_j\in H^2$ ($\forall j\geq 1$) 故に k_j は凡て定数となり、これは E が定数でないということに反する．故に $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_{(E)}$.

あとで見る様に Φ の Rota 空間 $\mathfrak{M}_{\Phi}$ は full range である．故に

$\mathfrak{M}_{\Upsilon} = \mathfrak{U}_{\Upsilon} H^2_{\mathcal{H}}$ （$\mathfrak{U}_{\Upsilon}$：内部函数）と表現できる．従って $\mathfrak{M}_{\Upsilon} \subsetneq \mathfrak{M}_0 \subsetneq H^2_{\mathcal{H}}$ なる invariant subspace $\mathfrak{M}_0$ が存在する必要十分条件は $\mathfrak{U}_{\Upsilon} = \mathfrak{V}\cdot\mathfrak{W}$ （$\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$；定数でない内部函数ー但し $\operatorname{codim} \mathfrak{M}_{\Upsilon} = 1$ のときは(定数で)よい）と factorization が出来ることである．従って Υ の invariant subspace の存在性の問題は内部函数，特に Rota 空間 $\mathfrak{M}_{\Upsilon}$ を表現する内部函数 $\mathfrak{U}_{\Upsilon}$（これを Υ の Rota 内部函数という）の factorization の問題に帰着される．この問題に就いては [3, 4] に詳しい．

<u>定理18</u>　$\dim \mathcal{H} < \infty$ とする．$\operatorname{codim} \mathfrak{M} > 1$ なら $\mathfrak{M}$ は極大でない．或は同値だが、自明な場合を除いて内部函数は factorization できる．

§5　Rota空間とPotapov空間．

<u>命題19</u>　$\mathfrak{M}_{\Upsilon} = \{ F \in H^2_{\mathcal{H}} \mid F = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n \chi^n,\ \sum_{n=0}^{\infty} (\Upsilon^*)^n \varphi_n = 0 \}$

<u>定理20</u>　$\mathfrak{M}_{\Upsilon} = (\chi - \Upsilon^*) H^2_{\mathcal{H}}$

証明．定義から $\mathfrak{M}_{\Upsilon} = \{ F \in H^2_{\mathcal{H}} \mid \int (F, (1-\chi\Upsilon)^{-1} e)\, d\sigma = 0\ \ \forall e \in \mathcal{H} \}$．$F \in \mathfrak{M}_{\Upsilon}$ に対して $G \equiv (1 - \chi^{-1}\Upsilon^*)^{-1} F \in H^2_{\mathcal{H}}$ なら $\chi^{-1} G \in H^2_{\mathcal{H}}$　故に $F = (\chi - \Upsilon^*)\chi^{-1} G \in (\chi - \Upsilon^*) H^2_{\mathcal{H}}$．$G \in H^2_{\mathcal{H}}$ を示す．$G = \sum_{-\infty}^{\infty} \varphi_n \chi^n$ とすると $F = (1 - \chi^{-1}\Upsilon^*) G = \sum_{-\infty}^{\infty} (\varphi_n - \Upsilon^* \varphi_{n+1}) \chi^n$，$F \in H^2_{\mathcal{H}}$ 故 $\varphi_n = \Upsilon^* \varphi_{n+1}$ ($n = -1, -2, \cdots$)．一方 $F \in \mathfrak{M}_{\Upsilon}$ だから $(\varphi_0, e) = \int (G, e)\, d\sigma = \int ((1-\chi^{-1}\Upsilon^*)^{-1} F, e)\, d\sigma = 0$　($\forall e \in \mathcal{H}$)　故に $\varphi_0 = 0$．従って $\varphi_{-1} = \Upsilon^* \varphi_0 = 0$，$\varphi_{-2} = \Upsilon^* \varphi_{-1} = 0, \cdots$．故に $G \in H^2_{\mathcal{H}}$．逆向きの包含関係は容易である．

系21　$\mathfrak{M}_T$ は full range である.

系22　T が正規作用素なら　$U_T = (\chi - T^*)(1-\chi T)^{-1}$

証明. T が正規であるから $(\chi - T^*)(1-\chi T)^{-1}$ は unitary で、勿論内部函数となる. $(1-\chi T)^{-1}H^2_{\mathcal{H}} = H^2_{\mathcal{H}}$ となるから定理20から　$\mathfrak{M}_T = (\chi - T^*)H^2_{\mathcal{H}} = (\chi - T^*)(1-\chi T)^{-1}H^2_{\mathcal{H}}$.

命題23　$U_T = U_0 + \chi(1-\chi T)^{-1}U_1$　此処で U_0, U_1 は定数作用素.

定理24　$\dim \mathcal{H} = N < \infty$ とする. T^* の特性多項式を $\prod_{j=1}^{N}(z-\lambda_j)$ とすると

$$\det U_T(e^{i\theta}) = \prod_{j=1}^{N} \frac{e^{i\theta}-\lambda_j}{1-\bar{\lambda}_j e^{i\theta}}$$

証明. 定理20から $U_T H^2_{\mathcal{H}} = (e^{i\theta} - T^*)H^2_{\mathcal{H}}$. 従って $\{\det(e^{i\theta}-T^*)/\det U_T\}$ は H^∞ の invertible element、故に外部函数. $\det(e^{i\theta}-T^*)$ は T^* の特性多項式である. 外部函数は零点又は極を円板内に持たないから $\det U_T$ と $\det(e^{i\theta}-T^*)$ は同じ重複度の零点を持つ. この様な性質を持つ内部函数は $\prod_{j=1}^{N}\frac{e^{i\theta}-\lambda_j}{1-\bar{\lambda}_j e^{i\theta}}$ の絶対値1の定数倍だけである.

定理25　$\dim \mathcal{H} < \infty$ とし、T^* の最小多項式を $\prod_{j=1}^{r}(z-\lambda_j)$ とする. U_T の特性内部函数は

$$q(e^{i\theta}) = \prod_{j=1}^{r} \frac{e^{i\theta}-\lambda_j}{1-\bar{\lambda}_j e^{i\theta}}$$

証明. $\prod_{j=1}^{r}(1-\bar{\lambda}_j e^{i\theta})^{-1}$ は外部函数だから $q H^2_{\mathcal{H}} = \prod_{j=1}^{r}(e^{i\theta}-\lambda_j)H^2_{\mathcal{H}}$.
まず $\mathfrak{M}_T \supset q H^2_{\mathcal{H}}$ を示す. $\sum_0^\infty \varphi_n z^n$, $\sum \|\varphi_n\|^2 < \infty$ に対して

$\prod_{j=1}^{r}(e^{i\theta}-\lambda_j)\sum_{0}^{\infty}\varphi_n e^{in\theta}\in \mathfrak{M}_T$ を示せばよい. $\mathfrak{M}_T$ は invariant 故このためには $\forall\varphi$ に対して $\prod_{j=1}^{r}(e^{i\theta}-\lambda_j)\varphi\in\mathfrak{M}_T$ を示せばよい. 命題19 によりこのことは $\sum_{n=0}^{r}a_n(T^*)^n\varphi=0$ と同値である(但し $\prod_{j=1}^{r}(e^{i\theta}-\lambda_j)=\sum_{n=0}^{r}a_n e^{in\theta}$ とおいた). 所で $\sum a_n e^{in\theta}$ は T^* の最小多項式故これは成立する. 従って $\mathfrak{M}_T\supset qH^2_{\mathfrak{H}}$. 今 $\mathfrak{M}_T\supsetneq pH^2_{\mathfrak{H}}\supset qH^2_{\mathfrak{H}}$ (p: scalar 内部函数)とすると p は有限 Blaschke 積でなければならない. $p(e^{i\theta})=\prod_{j=1}^{k}\frac{e^{i\theta}-\beta_j}{1-\bar\beta_j e^{i\theta}}$ $(k\le r)$ とおく. このとき $\prod(1-\bar\beta_j e^{i\theta})^{-1}$ は外部函数故 $\mathfrak{M}_T\supsetneq pH^2_{\mathfrak{H}}=\prod_{j=1}^{k}(e^{i\theta}-\beta_j)H^2_{\mathfrak{H}}$. 特に $\forall e\in\mathfrak{H}$ に対して $\prod_{j=1}^{k}(e^{i\theta}-\beta_j)e\in\mathfrak{M}_T$. 命題19により $\prod_{j=1}^{k}(T^*-\beta_j)=0$. 所で $\prod_{j=1}^{r}(e^{i\theta}-\lambda_j)$ が T^* の最小多項式故 $k=r$ となり結局 $p=q$.

Rota空間の応用の一つとして次ぎの命題を挙げておく.

<u>命題26</u>　$\dim\mathfrak{H}=\infty$ なら full range を持つ $H^2_{\mathfrak{H}}$ の disjoint な invariant subspaces の uncountably family $\{\mathfrak{M}_\alpha\}$ が存在する.

証明. T^* の Rota 空間 $\mathfrak{M}_{T^*}$ は $H^2_{\mathfrak{H}}$ の full range を持つ invariant subspace で, 更に T, U が disjoint な値域を持つ様な 1−1 有界線型作用素なら $\mathfrak{M}_{T^*}\cap\mathfrak{M}_{U^*}=\{0\}$. 依ってかゝる作用素の uncountably family を示せばよいが, これは容易である.

Potapov [6] によれば T に関連するもう一つの内部函数があって

$$V_T(e^{i\theta})=(1-T^*T)^{-\frac{1}{2}}(e^{i\theta}-T^*)(1-\chi T)^{-1}(1-TT^*)^{\frac{1}{2}}$$

は内部函数である. この V_T を Potapov 内部函数といゝ, $V_T H^2_{\mathfrak{H}}$ を

Potapov 空間という。　これは $B;\ \mathcal{K} \ni e \to G_e = (1-T^*T)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (T^n e) x^n \in H^2_{\mathcal{K}}$ なる対応を考えるとき $V_T H^2_{\mathcal{K}} = H^2_{\mathcal{K}} \ominus B\mathcal{K}$ なる空間で、Tについての invariant subspace の存在性の問題は T の Potapov 空間が $H^2_{\mathcal{K}}$ の invariant subspace として極大でないということゝ同値になる。系22からTが正規作用素ならその Rota 空間と Potapov 空間は一致する．更に

<u>定理27</u>　$\dim \mathcal{K} = N < \infty$ なら $\det U_T = \det V_T$ で、且つ U_T と V_T の特性内部函数は同一である．

証明．$\det V_T = \det(1-T^*T)^{-\frac{1}{2}} \det(x - T^*) \det(1 - xT)^{-1} \det(1 - TT^*)^{\frac{1}{2}}$
最初と最後の因子は定数で、第2の因子はT^*の特性多項式、第3の因子は

$$\det(x(x^{-1} - T)^{-1}) = x^{-N}\Big[\prod_{j=1}^{N}(x^{-1} - \bar{\lambda}_j)\Big]^{-1} = \prod_{j=1}^{N}(1 - x\bar{\lambda}_j)^{-1}$$

最初の主張が定理24から従う．$V_T H^2_{\mathcal{K}} = (1 - T^*T)^{-\frac{1}{2}} U_T H^2_{\mathcal{K}}$ だから $[\, V_T H^2_{\mathcal{K}} \supset g H^2_{\mathcal{K}} \Leftrightarrow U_T H^2_{\mathcal{K}} \supset g H^2_{\mathcal{K}} \,]$ これから後半の主張が出る．

<u>定理28</u>　Rota空間 $\mathfrak{M}_T$（或は Potapov空間）が all directions を含む必要十分条件は T が polynomial equation $p(T) = 0$ を満たすことである．

定理3 は [12]，定理28 は [11] に証明がある．その他の証明を省略した定理の証明は [3] で与えられている．此処で与えた証

明は[4, 8, 9, 11]等による．作用素函数のfactorizationの問題は[3]，内部函数に就いての他の結果は[10]等に見られる．

文献

[1] W. B. Arveson; Analyticity in operator algebras, Amer. Journ. Math., 89 (1967) 578-642.

[2] M. Camburn; Analytic Range Functions, Journ. Math. Analy. & Apply., 12 (1965) 413-424.

[3] H. Helson; Lectures on Invariant Subspaces, Academic Press, N.Y., 1964

[4] ________; Sous-Espaces Invariants, Publications Mathématiques d'Orsay, Annee 1966-67.

[5] Y. Ohno; Simply invariant subspaces, Tohoku Math. Journ., 19 (1967), 368-378.

[6] V. P. Potapov; The multiplicative structure of J-contractive matrix functions, Amer. Math. Soc. Transl. 15 (1960), 131-243.

[7] G.-C. Rota; Note on the invariant subspaces of linear operators, Rendiconti del Circolo Mathematico di Palermo (2) 8 (1959), 182-184.

[8] M.J. Sherman; Operators and Inner Functions, Pacific Journ. Math., 22 (1967) 159-170.

[9] ————; Disjoint Invariant Subspaces, to appear.

[10] ————; A spectral theory for inner functions, to appear.

[11] ————; Invariant subspaces containing all analytic directions, to appear.

[12] T.P. Srinivasan; Doubly invariant subspaces, Pacific Journ. Math., 14 (1964) 701-707.